M 66

M 66
M 66
M 66
M 66
M 66
M 66
M 66
M 66
M 66

Einführung:

Die Beschreibung eines mathematischen Modells auf seine Eigenschaften hin, wird allgemein als Algebra bezeichnet.
So gibt es beispielsweise die "lineare Algebra" oder die "Boolesche Algebra". Der Grund dafür, daß in diesem Zusammenhang von "Intervall-Algebra" gesprochen werden kann, ist auf die Möglichkeit zurückzuführen, die Intervallstruktur als mathematisches Modell aufzufassen.
Die Notwendigkeit, sich über diese Algebra Aufschluß zu verschaffen, ergibt sich aus der Tatsache, daß zwar mit dem Intervallbegriff häufig "operiert" wird, ohne aber sich über diesen genügend Klarheit verschafft zu haben. Insbesondere die Anwendung auf verschiedene Musiken fordert desweiteren eine genauere Begrifflichkeit.

1. Zum Intervall

1.1. Voraussetzung:

Das Schwingen der Saite eines Monochords sei ein Ereignis E.
Die Menge aller Ereignisse E sei M_e. Über die Wahrnehmung der Tonhöhe sei jedem Ereignis E eine Tonhöhe T zugeordnet, also: $M_e \rightarrow M_t$

mit: $M_t = \{ x \mid x \text{ ist Tonhöhe} \}$

Für die Menge M_t wird eine totale Ordnung gefordert, das heißt:

a.) Totalität: $T_1,T_2 \in M_t \; (T_1 \leq T_2 \cup T_1 \geq T_2)$

b.) Antisymmetrie: $T_1,T_2 \in M_t \; (T_1 \leq T_2 \cap T_1 \geq T_2 \Rightarrow T_1 = T_2)$

c.) Transitivität: $T_1,T_2,T_3 \in M_t \; (T_1 \leq T_2 \cap T_2 \leq T_3 \Rightarrow T_1 \leq T_3)$

Diese drei Punkte müssen erfüllt sein, wenn es möglich sein soll, die Töne in Bezug auf die Tonhöhe zu ordnen.

Qualitativ bedeutet dies:

a.) Jeder (hörbare) Ton muß mit jedem (hörbaren) Ton (auch mit sich selbst) vergleichbar sein.

b.) Zwei Töne, von denen der erste sowohl "größer gleich" dem zweiten ist, als auch "kleiner gleich", muß dem zweiten "gleich" sein.

c.) Wenn ein erster Ton "kleiner gleich" einem zweiten ist und dieser zweite "kleiner gleich" einem dritten, dann ist auch der erste Ton "kleiner gleich" dem dritten Ton.

1.2. Das Intervall:

Unter einem Intervall versteht man die Verknüpfung zweier Ereignisse E_1 und E_2 aus M_e bzw. zweier Tonhöhen T_1 und T_2 aus M_t über die Wahrnehmung der Tonhohendistanz.

Die Menge aller Intervalle sei M_I. Es gilt:

$$W: \cancel{M_I} \; M_e \; X \; M_e \rightarrow M_t \; X \; M_t \; = M_i$$

Das Zeichen "X" (cartesisches Produkt) bedeutet in diesem Zusammenhang, daß irgendeine Verknupfung, die nicht näher bestimmt zu sein braucht, zweier Ereignisse E_1 und E_2 bzw. zweier (wahrnehmbarer) Tone T_1 und T_2 (qualitativ) zu einem neuem Phanomen fuhrt – namlich zur Wahrnehmung eines Intervalls $I_{1/2}$. So wird durch den obigen Ausdruck einfach auf die fähigkeit verwiesen, zwei Tone uber ihre Distanz aufeinander zu beziehen.

Ebenso wie es notwendig war, fur die Menge M_t eine totale Ordnung zu fordern – da nur im Falle einer totalen Ordnung der Tone der Begriff Tonhohendistanz sinnvoll eingefuhrt werden konnte – , ist dies auch für die Menge M_I notwendig.

Auch fur M_I soll also gelten: $(M_I \; , \leq)$

Um die drei Punkte (Totalität/Antisymmetrie/Transitivität) zu erfullen, wird qualitativ "vereinbart":

a.) Jedes (hörbare) Intervall muß mit jedem (hörbaren) Intervall (auch mit sich selbst) vergleichbar sein.

b.) Zwei Intervalle, von denen das erste sowohl "großer gleich" dem zweiten ist, als auch "kleiner gleich", muß dem zweiten "gleich" sein.

c.) Wenn ein erstes Intervall "kleiner gleich" einem zweiten ist und dieses zweite "kleiner gleich" einem dritten, so muß das erste "kleiner gleich" dem dritten sein.

Anmerkung: Über die Wahrnehmung der Intervalle werden die verknüpften Ereignisse (M_e X M_e) in Klassen eingeteilt; so gehoren der Intervallklasse der Oktaven eben alle Tonfolgen an, deren Distanz einer Oktave entspricht.

Behält man als Tonquelle das Monochord bei, so lassen sich nur Intervalle konsekutiver Töne erzeugen, für die es sinnvoll scheint, Intervalle in positive und negative einzuteilen. Hierbei soll gelten:

- Die Menge aller positiven Intervalle M_i^+ ist gegeben durch:

$$M_i^+ = \{ I_{a/b} \mid T_a < T_b \}$$

- Die Menge aller negativen Intervalle M_i^- ist gegeben durch:

$$M_i^- = \{ I_{a/b} \mid T_a > T_b \}$$

- Das "Nullintervall" $I_{a/b} = I_\emptyset$ ist gegeben, wenn gilt:

$$T_a = T_b, \text{ und } M_i^\emptyset = \{ I_\emptyset \}$$

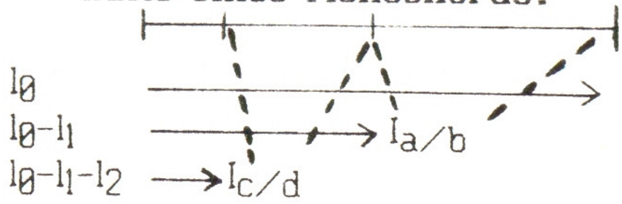
Für die Betrachtung von Intervallen simultaner Töne – wie es für viele Musiken notwendig ist – , bietet es sich an, die Mengen M_I^+, M_I^- und M_I^0 wieder zu einer Menge M_I' zusammenzufassen, indem nur die Beträge der Intervalle beachtet werden.

1.3. Die Operation "+" auf der Menge M_I:

Der Operationsalgorithmus zur "Addition" ("+") zweier Intervalle $I_{a/b}$ und $I_{c/d}$ am Monochord lautet so:

"Die Saite mit Ausgangstonhöhe T_a ist solange zu verkürzen, bis die Zwischentonhöhe T_b zur Ausgangstonhöhe das Intervall $I_{a/b}$ bildet. Nun ist die Saite soweit zu verkürzen, bis die Endtonhöhe T_d zur Zwischentonhöhe T_b (= T_c) das Intervall $I_{c/d}$ bildet."

Saite eines Monochords:



Zur Zeichnung:

Dem ersten Ton T_a ist die Länge l_0 zuzuordnen, dem zweiten bzw. dritten Ton $T_b = T_c$ die Länge l_0-l_1 und dem vierten Ton T_d die Länge $l_0-l_1-l_2$. (Die Zuordnung einer Länge l_n zu einem Ton T_n wird im nächsten Abschnitt – formalisiert – eingeführt.)

Die (zweistellige) Operation selbst lautet :

$$"+": M_I^2 \rightarrow M_I \quad "+"(\, I_n \,,\, I_m \,) = I_n + I_m$$

Dies bedeutet:

"Eingeführt wird die Operation "+" (Addition), indem zwei Elemente der Menge M_I (daher die "2" bei M_I^2) wieder in die Menge M_I abgebildet werden – also $M_I^2 \rightarrow M_I$ – , wobei die Verknüpfung zweier Elemente I_n und I_m der Menge – "+" (I_n, I_m) – geschrieben wird als:

$$I_n + I_m$$

Daß diese Operation als "Addition" bezeichnet wird, ist auf die Ähnlichkeit der Menge M_I bezüglich ihrer Verknüpfung zur Menge der reelen Zahlen **R** bezüglich der "gebrauchlichen" Addition zurückzuführen. In beiden Fällen handelt es sich um additive Gruppen, das heißt: Beide besitzen bestimmte Strukturmerkmale, wie sie für additive Gruppen gefordert werden.

Eine additive Gruppe liegt vor, wenn gilt:

a.) – Abgeschlossenheit:

$$\mathbf{M} \times \mathbf{M} = \mathbf{M}$$

Dies ist bereits durch die Operationsanweisung – $M_I^2 \rightarrow M_I$ – festgelegt.

b.) – Neutrales Element:

$$e \in \mathbf{M} \,(e * a = a * e = a \mid a \in \mathbf{M})$$

Das in Abschnitt 1.2. eingefuhrte Nullintervall $I_\emptyset$ (die Prim) verhalt sich bezüglich der Intervalladdition neutral, das heißt: $I_\emptyset = e$.

c.) - Inverses Element:

$$a \in \mathbf{M} \; (a * a^{-1} = e)$$

Das inverse Intervall I_n^{-1} zu einem gegeben Intervall I_n ist dadurch zu bilden, daß - entsprechend den reellen Zahlen - das "Vorzeichen" des Intervalls I_n umgekehrt wird, also: $I_n^{-1} = - I_n$

d.) - Assoziativität:

$$I_l, a, b, c \in \mathbf{M} \; ((a * b) * c = a * (b * c))$$

Daß es für die Addition von drei gegebenen Intervallen I_l, I_n, $I_m \in M_l$ keinen Unterschied macht, ob erst I_n zu I_l addiert wird und hierzu dann I_m oder zu I_l die "Summe" von I_n und I_m, ist aus dem bisher Gesagten nicht zu schließen, leuchtet aber intuitiv ein.

Die Punkte a.) - d.) sind Strukturmerkmale, die allgemein für jede Gruppe (Permutationsgruppe, multiplikative Gruppe, Drehgruppe eines Würfels ...) zutreffen.
Ein speziellerer Typ von Gruppen, dem auch die additiven Gruppen angehören, sind die abelschen Gruppen.
Eine abelsche Gruppe schließt die Kommutativität ein:

e.) - Kommutativität:

$$a, b \in \mathbf{M} \; (a * b = b * a)$$

Wie im Falle der Assozitivität (Punkt d.)) leuchtet es zwar intutiv ein, daß es gleichgültig ist, ob zu einem gegeben Intervall $I_n \in M_l$ ein Intervall $I_m \in M_l$, oder ob zu I_m das Intervall I_n addiert wird, muß aber dennoch an dieser Stelle gefordert werden.

Schließlich muß, um eine additive Gruppe zu erhalten, ein Strukturmerkmal eingeführt werden, das die besondere Eigenschaft des inversen Elements betrifft.

f.) - Symmetrie des inversen Elements:

$$a \in \mathbf{M} \Rightarrow a^{-1} = -a \quad \text{oder:}$$

$$a \in \mathbf{M} \Rightarrow |a| = |a^{-1}|$$

Auf diese Eigenschaft von M_l wurde bereits unter Punkt c.) hingewiesen.

Anmerkung: Die Abgeschlossenheit der Gruppe $G_l = (M_l , +)$ ist nur theoretisch gewährleistet.

Da es Ereignisse der Menge M_e gibt, denen (qualitativ) keine Tonhöhe zugeordnet werden kann – eben, wenn die Hörgrenzen nach "oben" bzw. nach "unten" überschritten werden –, kann nicht für alle Elemente $E \in M_e$ das cartesische Produkt $M_e \times M_e$ gebildet werden, so daß in der Menge M_i ein (subjektiv unterschiedliches) maximales Element I_{max} und entsprechend ein minimales $I_{min} = -I_{max}$ auftreten. Damit ist die Menge sowohl nach "unten", als auch nach "oben" beschränkt. Empirisch relevant ist demnach nur eine Teilmenge von M_i, die sowohl ein Infimum, als auch ein Supremum besitzt. Diese Teilmenge – sagen wir T_i – von M_i ist nicht abgeschlossen bezüglich der Addition, denn es gilt:

$$I_n \in T_i \; (\; I_{max} + I_n = I_m > I_{max} \Rightarrow I_m \notin T_i \;\mid\; I_n > I_0 \;)$$

1.3.1. Die Untergruppe U_i' der äquidistanten Stimmungen:

Bislang wurde die Menge M_i, die grundsätzlich alle Intervalle enthalten soll, betrachtet. Die Mächtigkeit (Anzahl der Elemente) dieser Menge entspricht, da sie aus einem "Kontinuum" an Intervallen besteht, der Mächtigkeit der reelen zahlen – sie ist überabzählbar.

Unter einer Untergruppe versteht man eine solche Teilmenge der Gruppenmenge, für die die Gruppenaxiome erfüllt sind. Wie bereits in Kapitel 1.3. bemerkt wurde, ist dies nicht mit einer Beschränkung der Grundmenge durch ein Supremum oder ein Infimum möglich.

Es besteht aber eine andere Möglichkeit:

Ähnlich, wie die Addition bezogen auf die Menge der reelen Zahlen auf die der ganzen Zahlen beschränkt werden kann, indem die 1 als erzeugendes Element – geschrieben: $U = \langle 1 \rangle$ – benutzt wird, kann dies auch für die Gruppe $G_i = (M_i , +)$ geschehen.

Betrachtet man sich den Tonvorat der 12-tönigen äquidistanten (gleichschwebenden) Stimmung, so fällt auf, daß ähnlich den ganzen Zahlen jeder Ton bzw. jedes Element durch n-fache Addition des Halbtons bzw. der Zahl 1 erreicht werden kann. Man könnte sozusagen den Halbtonschritt als "atomares" Intervall bezeichnen. Daß die Menge aller n-fachen Halbtonintervalle ${}^hM_i = \{ I_n \mid I_n = I_h{}^n \}$ die gleiche Mächtigkeit der natürlchen Zahlen **N** (abzählbar) besitzt ist augenfällig.

So erhalten wir die Untergruppe U_i zu G_i:

$$U_i = \langle I_h \rangle$$

Die Feststellung ist von entscheidenderer Bedeutung, als es vielleicht zunächst scheint:

Diese besondere Eigenschaft ist nämlich für die meisten historisch gewachsenen Tonsysteme nicht gegeben; auf diesen läßt sich keine Untergruppe zu G_1 bilden, da kein atomares Intervall vorzufinden ist. Das heißt: Die Frage, welche Intervalle addiert werden können, ist von der absoluten Tonhöhe des Ausgangstons abhängig. So kann beispielsweise in einem heptatonischen System - aufbauend auf den Stammtonnen - zur Prim c keine kleine Sekund addiert werden, weil das Element "des" im Tonvorrat nicht vorhanden ist, andererseits muß das Halbtonintervall vorhanden sein, da sonst nicht der Tonschritt "e" - "f" möglich wäre.

Die gleichschwebende Stimmung ist mit ihrer Eigenschaft, eine Untergruppe zu G_1 zu bilden, historischer Ausdruck einer sich durchsetzenden relativistischen Denkweise, da ihre Gruppeneigenschaft die Abstraktion von der absoluten Tonhöhe erlaubt.
Daß es auch andere Untergruppen zu G_1 gibt, ist offensichtlich. Ein Beispiel stellt die 24-tonige äquidistante Stimmung dar (atomares Intervall: 1/4-Tonschritt), es sind aber auch äquidistante Stimmungen denkbar, die nicht oktavierend sind.

2. Saitenverhältnis:

Die Notwendigkeit, dem Intervallbegriff eine quantitative Größe zuzuordnen, besteht vor allem für die Behandlung von Stimmungsproblemen und Tonsystemen. Aber auch im Bereich der quantitativen Analysemethoden ist eine solche Zuordnung zu fordern. Üblicherweise geschieht dies durch die Einführung des Saitenverhältnisses oder - verallgemeinert - durch die Wellenlängenverhältnisse.

2.1. Voraussetzung:

Entsprechend 1.1. wird die Menge M_e eingeführt.
Über eine Messung mit einem Längenmaßstab wird jedem Ereignis E aus der Menge M_e ein Sachverhalt S mit der Eigenschaft S(l) zugeordnet.
Die Menge aller S(l) sei M_s.
Es gilt:

$$M_e \rightarrow M_s$$

Für die Menge M_s ergibt sich, da die Eigenschaft l durch eine Zahl Element **R** angegeben werden soll, eine totale Ornung, also: (M_s , $\leq$).
Empirische Erfahrung ergibt eine Abbildung der Menge aller Tonhöhen M_t auf die Menge M_s über die Zuordnung:

Je "höher" eine Tonhöhe eines Ereignis, desto kleiner ist die Länge l.

oder entsprechend:

Je "tiefer" die Tonhöhe eines Ereignis, desto größer ist die Länge l.

Eine wichtige Eigenschaft dieser Abbildung ist, daß nicht nur die beiden Mengen injektiv (eindeutig) und surjektiv (vollständig) - also bijektiv - aufeinander abgebildet werden, sondern daß hierbei auch die totalen Ordnungen erhalten bleiben.
Es handelt sich also um einen "Ordnungsisomorphismus", geschrieben:

$$A: M_t \rightarrow M_s \quad \text{isomorph}$$

2.2. Die Bijektion $M_l \rightarrow M_V$:

Die Menge aller Intervalle M_i war in Abschnitt 1.2. über das Kreuzprodukt: $M_t \times M_t = M_e \times M_e = M_i$ eingeführt worden. Die Frage besteht nun darin, ob es in irgendeiner Weise moglich ist, ein Kreuzprodukt: $M_l \times M_l = M_V$ auf der Menge M_l derart zu bilden, daß für die Menge M_V gilt:

$$A: M_t \times M_t = M_i \rightarrow M_V = M_l \times M_l \quad \text{isomorph}$$

Gesucht ist also nach einer quantitativen Zuordnung einer Größe, die durch eine Verbindung zweier Saitenlängen zu gewinnen ist, zu einem Intervall, die die Ordnung der Menge M_i bewahrt.
Empirische Erfahrung zeigt, daß diese Forderung genau dann erfüllt ist, wenn das Verhaltnis der beiden Saitenlängen der beiden Ecktöne des Intervalls gebildet wird, also:

$$I_{a/b} \rightarrow V_{a/b} = S(l_a) : S(l_b)$$

Die Menge aller Saitenvehältnisse sei also M_V, mit $(M_V, \leq)$.

<u>Beispiel:</u> Die beiden Ecktöne c - c' bilden das Intervall einer Oktave ebenso, wie die Ecktöne f - f'. Der Klasse der Oktaven wiederum ist das Saitenverhältnis 1/2 zuzuordnen.

Entsprechend der Einteilung der Intervalle konsekutiver Töne in M_i^+, M_i^- und M_i^0 lassen sich die Saitenverhältnisse in Mengen einteilen. Daß eine solche Einteilung existieren muß, ergibt sich aus obiger Beziehung:

$$M_i \rightarrow M_V \quad \text{isomorph}.$$

- Da für $I_{a/b} \in M_i^+$ die Beziehung $T_a < T_b$ galt (1.2.), folgt für $V_{a/b} \in M_V^+$: $S(l_a) < S(l_b)$ und damit: $V_{a/b} < 1$, also:
$$M_V^+ = \{ V_{a/b} \mid S(l_a) < S(l_b) \}$$
- Entsprechend ergibt sich unter der Bedingung $T_a > T_b$ für die Abbildung eines Intervalls $I_{a/b}$: $S(l_a) > S(l_b)$ und damit: $V_{a/b} > 1$, also:
$$M_V^- = \{ V_{a/b} \mid S(l_a) > S(l_b) \}$$
- Und schließlich ergibt sich für das Nullintervall das <u>"Einsverhältnis"</u> $V_{a/b} = V_0$, wenn gilt:
$$S(l_a) = S(l_b) \text{ und } M_V^0 = \{ V_0 \}$$

An dieser Stelle kann auch geklart werden, ob fur die Menge aller Tonhohen M_t ein Ton T_0 als Grenzfall für $S(1) = 0$ [Einheiten] - also ein Ton T_0, dessen saite keine Lange besitzt - sinnvoll zugelassen werden kann.

Nehmen wir an, es gabe einen Ton T_0, dann müßte es sowohl ein Verhaltnis $v_{0/b} \in M_I$ geben, für das gilt:

$$V_{0/b} = S(0) : S(l_b),$$

als auch ein Verhaltnis $V_{a/0}$ für das gilt:

$$V_{a/0} = S(l_a) : S(0).$$

Letzterer Ausdruck ist mathematisch nicht definiert, so daß sowohl die Tonhohe T_0, als auch die Saitenlänge $S(1) = S(0)$ ausgeschlossen werden muß. Somit ergibt sich fur M_V als Wertemenge die Menge $\mathbf{R}^+$.

Was wiederum die Behandlung von Intervallen simultaner Tone betrifft, ergibt sich entsprechend der Vereinbarung in Abschnitt 1.2. eine Menge M_V', deren wertemenge definiert ist als:

$$M_V' = \{ V_{a/b} \mid V_{a/b} \text{ aus }]0\,,1] \}$$

3. Der Gruppenisomorphismus $G_I \rightarrow G_V$:

In Abschnitt 1.3. wurde auf der Menge aller Intervalle M_I die Addition als Operation auf der Menge M_I eingeführt. Wie gezeigt werden konnte, handelte es sich bei dieser Struktur um eine additve Gruppe.

Die Frage, die nun eine zentrale Rolle spielt, lautet: "Ist es möglich, auch auf der Menge M_V eine Operation einzuführen, die es gestattet, auf der Menge M_V so zu operieren, wie dies durch die Addition auf M_I möglich war?"

Mathematisch bedeutet dies: Existiert eine Abbildung der Gruppe G_I zur Gruppe G_V (dies ist die Menge M_V mit ihrer gesuchten Operation "$*$"), so daß dies ein Isomorphismus ist?

Die Beantwortung dieser Frage soll in drei Schritten geschehen:

1. Gesucht wird nach einem Homomorphismus (dies ist eine Abbildung, die noch nicht die Eindeutigkeit (Injektivität) und die Vollständigkeit (Surjektivität) gewährleistet, die also nicht notwendiger Weise bijektiv ist, wogegen ein Isomorphismus ein bijektiver Homomorphismus ist).
2. Gezeigt werden soll, daß dieser Homomorphismus bijektiv ist.
3. Schließlich muß noch nachgewiesen werden, ob die Menge M_V bezüglich der gesuchten Operation eine Gruppe ist.

3.1. Der Homomorphismus von G_I nach G_V:

Eine Abbildung A: $G_1 = (M_1\,,+) \rightarrow G_2 = (M_2\,,*)$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn gilt:

$$a_1,b_2 \in M_1 \quad (A(a_1 + b_1) = A(a_1) * A(b_1))$$

Übertragen auf die Gruppe G_I und die gesuchte Gruppe G_V bedeutet dies:

$$A(I_{a/b} + I_{b/c}) = A(I_{a/b}) * A(I_{b/c})$$

mit: "*" als Verknüpfung auf M_V.

In Abschnitt 1.3. wurde der Operationsalgorithmus der Addition zweier Intervalle $I_{a/b}$ und $I_{c/d}$ festgelegt und in Verbindung mit den jeweiligen Saitenlängen gebracht.

Der Anweisung entsprechend muß für die Abbildung $A(I_{a/b} + I_{c/d})$ gelten:

Der erste Ton besitzt die Länge l_0, der zweite Ton die Länge $(l_0 - l_1)$ und der dritte Ton die Länge $(l_0 - l_1 - l_2)$, somit ergibt sich für das Intervall $I_{a/d}$ das Saitenverhältnis: $V_{a/d} = S[(l_0) : (l_0 - l_1 - l_2)]$

und damit also:

$$A(I_{a/b} + I_{c/d}) = S[(l_0) : (l_0 - l_1 - l_2)]$$

Desweitern erhält man für $V_{a/b}$:

$$V_{a/b} = S[l_0 : (l_0 - l_1)]$$

und für $V_{c/d}$:

$$V_{c/d} = S[(l_0 - l_1) : (l_0 - l_1 - _2)]$$

Somit liegt genau dann eine homomorphe Abbildung vor, wenn gilt:

$$S[l_0 : (l_0 - l_1 - l_2)] = S[l_0 : (l_0 - l_1) * (l_0 - l_1) : (l_0 - l_1 - l_2)]$$

Wird an dieser Stelle das Verknüpfungszeichen "*" durch das der "gebräuchlichen" Multiplikation "·" ersetzt, wird offensichlich, daß die Multiplikation der Saitenverhältnisse eine Verknüpfung darstellt, die zur Intervalladdition zumindest homomorph ist.

3.1.2. die Bijektivität der Abbildung G_I nach G_V:

Die Bijektivität ist an dieser Stelle nicht mehr zu zeigen, da der Homomorphismus unter der Voraussetzung der isomorphen Abbildung $M_I \rightarrow M_V$ konstruiert wurde und damit auch die Bijektivität (in 2.2.) notwendig übertragen wurde.

3.1.3. Die Gruppe G_V:

Daß es sich im Fall $G_V = (M_V\ ,\ .)$ um eine (multiplikative) Gruppe handelt, ist offensichtlich. Das heißt, G_V ist:

- abgeschlossen
- besitzt das neutrale Element V_0
- besitzt zu jedem Element ein inverses Element
- ist assoziativ
- ist kommutativ
- das inverse Element wird geschrieben: $V_{a/b}^{-1} = 1 : V_{a/b}$

Somit ist gezeigt, daß für die Menge M_V eine Operation (oder Verknüpfung)

"$\cdot$" existiert, so daß diese zu einer (multiplikativen) Gruppe $G_V = (M_V\ ,\ \cdot)$ führt, die zur Gruppe G_I isomorph (strukturähnlich) ist.

Der Grund für das Interesse an einer solchen Beziehung, liegt auf der Hand: Die Einführung des Saitenverhältnisses geschah, um dem Intervallbegriff eine meßbare Größe zuzuordnen. Der Vorteil der neu eingeführten Operation auf der so gewonnen Menge M_V besteht darin, damit auch die (qualitative) Operation der Intervalladdition übertragen zu haben.

3.2. Die Untergruppe U_V der äquidistanten Stimmungen:
In Abschnitt 1.3.1. war die Möglichkeit vorgestellt worden, durch ein erzeugendes Element eine Untergruppe zur Intervallgruppe G_I zu erhalten. Da in Abschnitt 3 eine zu G_I isomorphe Gruppe G_V konstruiert werden konnte, muß es auch in G_V möglich sein, ebensolche Untergruppen zu bilden. Dies geschieht so:
Dem atomaren Intervall I_a wird das ihm zugehörige Saitenverhältnis V_a zugeordnet. Die Untergruppe U_V ergibt sich damit als:

$$U_V = \langle V_a \rangle$$

Während sich jedes Intervall einer äquidistanten Stimmung als n-fache Summe des atomaren Intervalls schreiben ließ, läßt sich jedes Saitenverhältnis einer äquidistanten Stimmung als n-faches Produkt des atomaren Saitenverhältnisses darstellen.
Für die gleichschwebende Stimmung gilt hierbei:

$$^hM_V = \{ V_n \mid V_n = V_h{}^n \}$$

Da die Oktave das Saitenverhältnis 1/2 besitzt und die gleichschwebende Stimmung bedeutet, daß die Addition von 12 Halbtonschritten eine Oktave ergeben sollen, folgt für das atomare Saitenverhältnis:

$$(1 : V_h)^{12} = 1 : 2 \;\Rightarrow\; V_h = (2)^{1/12}$$

Schlußbemerkung:

Während in Abschnitt 1 der Intervallbegriff qualitativ über die Wahrnehmung auf seine algebraischen Eigenschaften hin untersucht wurde, folgte in Abschnitt 2 eine Gegenüberstellung durch die Einführung des Saitenverhältnisses, und in Abschnitt 3 wurde die algebraische Intervalladdition auf die Saitenverhältnisse übertragen.
So besteht also die Intervall-Algebra aus zwei Gruppen, die zueinander isomorph sind. Diese Isomorphie erlaubt eine eindeutige Verbindung zwischen der qualitativen und quantitativen Struktur dieser Algebra.
Die Konsequenzen für die Anwendung konnten immer nur am Rande erwähnt werden.

Ludger Hofmann-Engl